Lineare Algebra

G. Stenzel

Abschlussklausur

2. Februar 2023

Name: ________________________ Matr.-Nr.: ______________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Gegeben sind die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Basis von $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ an und beweisen Sie die geforderten Eigenschaften einer Basis für diese.

b) Finden Sie die Basisdarstellung des Vektors $v = (1, 12, 7)^\top$ bezüglich der Basis aus a).

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Bestimmen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie die algebraischen Vielfachheiten an.

b) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenräume und entscheiden Sie ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Gegeben ist der lineare Operator $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, welcher durch

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ -2x + 4y - 6z \\ 3x - 6y + 9z \end{pmatrix}$$

definiert ist.

a) Bestimmen Sie $\ker(T)$.

b) Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{C}^3$, der orthogonal auf jedes $w \in \ker(T)$ steht.