Übungen zu Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen (für PhysikerInnen)

2. Test, 2. Februar 2016

Name:

Matrikelnummer:

KFU: Gruppe Blatnik ○

Gruppe Hörl ○

Gruppe Schweiger ○

TU: Gruppe Neumayer 1 ○

Gruppe Neumayer 2 ○

Gruppe Rumetshofer ○

Aufgabe 1:	Punkte
Aufgabe 2:	Punkte
Aufgabe 3:	Punkte
Aufgabe 4:	Punkte
Gesamt:	Punkte

Übungsleiter: Schweiger

KFU Graz
TU Graz

M. Blatnik, A. Hörl, W. Schweiger
J. Neumayer, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen WS 15/16

---

2. Übungstest, 2. Februar 2016

Aufgabe 1: Das elektrostatische Potential zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2, die sich an den Orten $\vec{r}$ bzw. $\vec{r}'$ befinden, ist durch

$$V(\vec{r},\vec{r}') = \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass

$$V(\vec{r},\vec{r}') = \frac{Q_1 Q_2}{r'}\,\Phi\Big(\cos(\theta), \frac{r}{r'}\Big)\,,$$

wobei

$$\Phi(x,h) = (1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} h^l\, P_l(x)$$

die erzeugende Funktion für Legendre-Polynome ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass $r' = |\vec{r}'| > r = |\vec{r}|$. Ferner ist θ der Winkel zwischen $\vec{r}'$ und $\vec{r}$ ($\vec{r}' \cdot \vec{r} = r'\,r\cos(\theta)$).
Hinweis: Drücken Sie $|\vec{r}' - \vec{r}|$ durch r, r' und $\cos(\theta)$ aus ($|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$).
(3 Punkte)

b) Mit Hilfe der in a) angeführten Zusammenhänge gelangen Sie zu der Multipolentwicklung

$$V(\vec{r},\vec{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} V_l(r,r')P_l(\cos(\theta))$$

des elektrostatischen Potentials. Wie sieht $V_l(r,r')$ aus? **(2 Punkte)**

Aufgabe 2: Der Kern einer temperierten Distribution f_a sei durch

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

(mit $a > 0$) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die distributionelle Ableitung von f_a durch

$$f_a' = \frac{1}{2a}(\delta_{-a} - \delta_a)$$

gegeben ist, wobei δ_{x_0} für das Dirac'sche Deltafunktional steht.
Hinweis: Für eine Distribution F ist die distributionelle Ableitung durch $\langle F', \phi\rangle := -\langle F, \phi'\rangle$ definiert, wobei ϕ eine beliebige Testfunktion (aus dem Schwartz-Raum) ist.
(3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $\lim_{a\to 0} f_a' = \delta'_{x_0=0}$ (im Sinn von Distributionen).

Hinweis: Eine Folge von Distributionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen eine Distribution F, wenn $\lim_{n\to\infty}\langle F_n, \phi\rangle = \langle F, \phi\rangle$ für beliebige ϕ aus dem Testfunktionenraum.
(2 Punkte)

Aufgabe 3: Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \varphi)$ sind simultane Eigenfunktionen des Quadrats des Drehimpulsoperators

$$L^2 = -\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

zum Eigenwert $l(l+1)$ (d.h. $L^2 Y_l^m = l(l+1)Y_l^m$) und der z-Komponente des Drehimpulsoperators

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

zum Eigenwert m (d.h. $L_z Y_l^m = mY_l^m$). Gegeben sei nun die Kugelflächenfunktion

$$f(\theta, \varphi) = Ce^{i\varphi}\cos(\theta)\sin(\theta)\,,$$

wobei C eine geeignete Normierungskonstante ist.

a) Zeigen Sie, dass $f(\theta, \varphi)$ eine Eigenfunktion von L_z ist. Was ist der zugehörige Eigenwert m? **(1 Punkt)**

b) Zeigen Sie, dass $f(\theta, \varphi)$ eine Eigenfunktion von L^2 ist. Was ist der Eigenwert $l(l+1)$ bzw. was ist dann l? **(3 Punkte)**

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Laplacegleichung auf einer Kreisscheibe (in Polarkoordinaten)

$$\frac{\partial^2 u(r,\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\phi)}{\partial\phi^2} = 0\,, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\,, \quad 0 \leq r \leq r_0\,.$$

a) Mittels Separationsansatz $u(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$ findet man für $\Phi(\phi)$ die (gewöhnliche) Differenzialgleichung

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + \lambda^2\Phi(\phi) = 0\,.$$

Wie sieht die Differenzialgleichung für $R(r)$ aus? **(1 Punkt)**

b) Wie sieht die allgemeine, **reelle** Lösung der DGL für $\Phi(\phi)$ aus und welche Einschränkungen für λ ergeben sich aus der Periodizitätsbedingung $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$?
(1 Punkt)

c) Wie sieht die allgemeine, reelle und bei $r = 0$ **beschränkte** Lösung der (Euler'schen) DGL für $R(r)$ aus?
Hinweis: Ansatz $R(r) = Cr^\alpha$ mit zu bestimmendem α.
(1 Punkt)

d) Wenn Sie über die erlaubten Werte von λ summieren, nimmt die allgemeine Gesamtlösung die Form einer Fourierreihe an:

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n(r)\cos(n\phi) + B_n(r)\sin(n\phi)\right)\,.$$

Wie müssen die $A_n(r)$ und $B_n(r)$ gewählt werden, damit die Randbedingung $u(r_0, \varphi) = f(\phi)$ erfüllt wird? Wie sieht die r-Abhängigkeit von $A_n(r)$ und $B_n(r)$ aus? **(3 Punkte)**

Viel Glück!