KFU Graz
TU Graz

H. Gausterer, W. Schweiger
M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen
WS 17/18

1. Übungstest (Ersatztermin), 11. Dezember 2017

Aufgabe 1: Im Vektorraum der Polynome auf dem Intervall $[0,\infty)$ stellt die Menge der Monome $\{1, x, x^2, \ldots\}$ eine (nicht orthogonale) Basis dar. Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt-Verfahren, beginnend mit 1, die niedrigsten 2 **orthonormalen** Polynome bezüglich des Skalarproduktes

$$(f,g) = \int_0^\infty dx\, e^{-x} f(x)\, g(x)\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Die **Laguerre-Polynome** $L_n(x)$, $n = 0,1,2,3,\ldots$, lassen sich mit Hilfe der Rekursionsrelation

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\, L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad \text{mit} \quad L_0(x) = 1\,, L_1(x) = 1-x$$

gewinnen. Sie erfüllen die Orthonormalitätsrelation

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x} L_n(x)\, L_m(x) = \delta_{nm}\,.$$

a) Berechnen Sie $L_2(x)$ und $L_3(x)$. **(1 Punkt)**

b) Drücken Sie $f(x) = x^2$ durch die Laguerre-Polynome aus. **(2 Punkte)**

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x} x^2 L_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(2 Punkte)

Hinweis: Überlegen Sie sich, wo man die Orthogonalitätsrelation der Laguerre-Polynome sinnvoll verwenden kann.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \cos(x)$$

auf dem Intervall $[0, \pi/2]$. Setzen Sie die Funktion symmetrisch auf das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ so fort, dass Sie zu einer geraden Funktion $g(x) = g(-x)$ gelangen, die im Intervall $[0, \pi/2]$ mit $f(x)$ übereinstimmt, d.h. $g(x) = f(x)$ für $0 \le x \le \pi/2$.

a) Skizzieren Sie den Verlauf von $g(x)$ im Intervall $[-3\pi/2, 3\pi/2]$, wenn $g(x)$ als periodischen Funktion mit Periodenlänge π aufgefasst wird. **(1 Punkt)**

b) Berechnen Sie die (reelle Form der) Fourierreihe $FR(g)(x)$ (Periodizitätsintervall $(-\pi/2, \pi/2)$). **(4 Punkte)**

Hinweis: Benutzen Sie

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

und

$$\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n\,, \quad n = 0,1,2,3,\ldots.$$

Was ist dann $\sin((2n-1)\pi/2)$?

Aufgabe 4: a) Berechnen Sie die Fouriertransformation $\hat{f}(p)$ der Funktion

$$f(x) = \theta(x)\, e^{-x}\,, \qquad \text{wobei} \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \ge 0 \\ 0 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

die übliche Stufenfunktion sein soll. **(3 Punkte)**

b) Für welche komplexen Werte von p existiert die Fouriertransformation? **(1 Punkt)**

c) Es sei nun

$$\hat{g}(p) = (\hat{f}(p))^2\,.$$

Wie sieht die inverse Fouriertransformation $g(x) = \mathrm{FT}^{-1}(\hat{g})(x)$ aus? **(2 Punkte)**

Hinweis: Verwenden Sie für Aufgabe 4c) das Faltungsintegral.

Viel Glück!