KFU Graz — H. Gausterer, W. Schweiger
TU Graz — M. Holzmann, M. Rumetshofer, C. Stelzer

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen
WS 19/20

1. Übungstest, 20. November 2019

Aufgabe 1: Hermite-Polynome $H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, lassen sich unter anderem mit Hilfe der Rekursionsrelation

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - \frac{d}{dx} H_n(x) \quad \text{mit} \quad H_0(x) = 1$$

gewinnen. Sie erfüllen die **Orthogonalitätsrelation**

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\, H_n(x)\, H_m(x) = \delta_{nm}\, \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\,.$$

a) Berechnen Sie die Hermite-Polynome bis inklusive $H_4(x)$.
(2 Punkte)

b) Was ist der Koeffizient c_4 von H_4, wenn Sie $f(x) = x^4$ durch Hermite-Polynome ausdrücken, also in der Form $f = \sum_{i=0}^{4} c_i H_i$ schreiben?
(1 Punkt)

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von b) das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\, x^4\, H_4(x)\,.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 2: In $L^2[-1,1]$, dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$, sei eine Funktionenfolge durch

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{nx} & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

definiert.

a) Skizzieren Sie $f_1(x)$ und ein $f_n(x)$ für $n > 1$. Was passiert mit zunehmendem n?
(1 Punkt)

b) Diese Funktionenfolge konvergiert punktweise auf $[-1,1]$. Wie sieht die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ aus?
(1 Punkt)

c) Beweisen Sie, dass auch $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ gilt, f_n also auch bezüglich der L^2-Norm gegen f konvergiert.
(2 Punkte)

d) Konvergiert f_n auf $[-1,1]$ auch gleichmäßig gegen f? Begründen Sie Ihre Antwort.
(1 Punkt)

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $f(x) = x(\pi - x)$ für $0 \le x \le \pi$.

a) Setzen Sie diese Funktion so fort, dass Sie eine **gerade** Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ erhalten und bestimmen Sie die **reelle Form** der Fourierreihe dieser Funktion (Periode 2π).
(4 Punkte)

b) Benutzen Sie das Ergebnis aus a), um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

zu berechnen.
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie x zu wählen ist, damit Sie auf diese Reihe kommen.
(1 Punkt)

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \le \pi/2 \\ 0 & |x| > \pi/2 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}(p) = FT(f)(p)$ dieser (geraden) Funktion. Vereinfachen Sie das Endergebnis soweit wie möglich.
Hinweise: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]/2$,
$\sin(\pi/2 \pm \alpha) = \cos(\alpha)$.
(4 Punkte)

b) Welchen Wert nimmt $\hat{f}(p)$ bei $p = \pm 1$ an?
(1 Punkt)

c) Für welche (reellen) Werte von p existiert $\hat{f}(p)$?
(1 Punkt)

Viel Glück!