Übungen zu Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen (für PhysikerInnen)

2. Test, 29. Jänner 2020

Name:

Matrikelnummer:

KFU: Gruppe Gausterer ◯

Gruppe Schweiger ◯

TU: Gruppe 1 ◯

Gruppe 2 ◯

Gruppe 3 ◯

Aufgabe 1: Punkte

Aufgabe 2: Punkte

Aufgabe 3: Punkte

Aufgabe 4: Punkte

Gesamt: Punkte

KFU Graz
TU Graz

H. Gausterer, W. Schweiger
M. Holzmann, M. Rumetshofer, C. Stelzer

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen WS 19/20

2. Übungstest, 29. Jänner 2020

Aufgabe 1: Eine ungedämpfte harmonische Schwingung, die zum Zeitpunkt $t_0 > 0$ mittels eines Kraftstoßes in Gang gesetzt wird, kann durch ein Anfangswertproblem der Form

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = F\delta(t - t_0)\,, \quad \dot{x}(0) = x(0) = 0, \qquad t \geq 0,\ t_0 > 0,$$

beschrieben werden.

Finden Sie die Lösung dieses Problems mittels Laplacetransformation, am besten unter Verwendung des Faltungsintegrals. Wie lässt sich diese Lösung mit Hilfe der Heaviside-Funktion (Stufenfunktion) in kompakter Form schreiben?

Hinweise: Bei der Laplacetransformation bzw. im Faltungsintergral kann $\delta(t - t_0)$ wie eine gewöhnliche Funktion behandelt werden.
Beim Faltungsintegral für die Rücktransformation ist es zweckmäßig, die beiden Fälle $t > t_0$ und $t < t_0$ zu unterscheiden.
Ferner gilt für $f(t) = \sin(at)$, dass $L(f)(p) = a/(p^2 + a^2)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: $\xi(x) = x$ sei der Kern der regulären Distribution ξ, $\delta'(x)$ der formale Ausdruck für den Kern von $\delta'_{x_0=0}$, also der Ableitung der Delta-Distribution δ_{x_0} am Punkt $x_0 = 0$. Zeigen Sie, dass für das Produkt $\xi\,\delta'_{x_0=0}$ dieser beiden Distributionen folgendes gilt:

$$\xi\,\delta'_{x_0=0} = -\delta_{x_0=0}\,.$$

Hinweis: Sie müssen also beweisen, dass für Testfunktionen $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$

$$\langle \xi\,\delta'_{x_0=0}, \phi\rangle = -\langle \delta_{x_0=0}, \phi\rangle$$

gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Im 2-dimensionalen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$, der durch die Baselemente $e_1(t) = \cos(t)$, $e_2(t) = \sin(t)$ aufgespannt wird, sei ein Differenzialoperator D durch

$$Df(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

definiert.

a) Wie sieht die Matrixdarstellung $\hat{D}$ dieses Operators bezüglich der geordneten Basis $\{e_1, e_2\}$ aus?

(2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\vec{v}_i$ von D.

(2 Punkte)

c) Was sind dann die Eigenwerte λ_i und **Eigenfunktionen** $v_i(t)$ (d.h. Lösungen von $Dv_i(t) = \lambda_i v_i(t)$) des Differenzialoperators D?

(1 Punkt)

Aufgabe 4: Betrachten Sie das gemischte Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,, \qquad 0 < x < \pi\,,\ t > 0 \\
u(0,x) &= \sin(x)\,, \qquad 0 < x < \pi \\
u(t,0) &= u(t,\pi) = 0\,, \qquad t > 0\,.
\end{aligned}$$

a) Wie sehen die gewöhnlichen Differenzialgleichungen für $T(t)$ und $X(x)$ aus, wenn Sie den Separationsansatz $u(t,x) = T(t)X(x)$ verwenden.

(1 Punkt)

b) Bestimmen Sie die allgemeinen **reellen** Lösungen der Differenzialgleichungen für $T(t)$ und $X(x)$. Nennen Sie die Konstante, die bei der Variablenseparation auftritt, ω^2 und wählen Sie das Vorzeichen von ω^2 so, dass für $X(x)$ eine Schwingungsgleichung (mit periodischer Lösung) resultiert.

(2 Punkte)

c) Für einen bestimmten Wert von ω ist die allgemeine Lösung der obigen pDGL durch $u(t,x) = T(t)X(x)$ gegeben. Benutzen Sie Anfangs- und Randbedingungen, um in dieser allgemeinen Lösung die Konstante ω und die insgesamt drei Integrationskonstanten, welche in $T(t)$ und $X(x)$ auftauchen, zu bestimmen. Wie sieht dann die endgültige Lösung $u(t,x)$ des Anfangs-Randwertproblems aus?

(3 Punkte)

Hinweis: Es ist nicht notwendig, die Lösungen der DGLn für $T(t)$ und $X(x)$ im Punkt b) herzuleiten, falls Sie diese wissen, oder erraten.

Viel Glück!