Institut für Physik
FB Theor. Physik
KFU Graz

M. Mitter
W. Schweiger

Funktionalanalysis Übungen

Abschlusstest (28. Jänner 2011)

Aufgabe 1: Die periodische Funktion $f(x)$ (mit Periodenlänge 2π) sei durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ e^{-ix} & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

gegeben.

a) Finden Sie die **komplexe** Form der Fourierreihe für $f(x)$.
(6 Punkte)

b) Wie sieht der Fourierkoeffizient für $n = -1$ aus?
(2 Punkte)

c) Schreiben Sie die die Reihe für $|n| \leq 4$ explizit hin.
(2 Punkte)

Aufgabe 2: a) Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{ax} \delta(\cos(x))$$

(4 Punkte)

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{ax} \frac{d}{dx} (\delta(\cos(x)))$$

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Laplace-Transformation von

$$\theta(6 - x)\, \delta(\cos(x))$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Das charakteristische Polynom der symmetrischen Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \det(\hat{A} - \lambda\hat{I}) = -(\lambda - 11)(\lambda - 8)^2 .$$

a) Was sind die Eigenwerte und zugehörigen **orthonormierten** Eigenvektoren von $\hat{A}$?
(6 Punkte)

b) Wie sieht die unitäre Matrix $\hat{U}$ aus, die $\hat{A}$ diagonalisiert (d.h. $\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} = \hat{\Lambda}$)?
(2 Punkte)

c) Wie sieht die Spektraldarstellung von $\hat{A}$ aus?
(2 Punkte)

Aufgabe 4: Auf $L^2(\mathbb{R})$, d.h. dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$, sei der **Schrödingeroperator** durch

$$H := \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)$$

definiert, wobei $V(x)$ eine reelle Funktion ist. Der kleinste Eigenwert von H sei E_0 und die zugehörige Eigenfunktion sei $\psi_0(x)$. Die Eigenfunktion $\psi_0(x)$ erfüllt also die Schrödingergleichung

$$H\psi_0(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi_0(x) = E_0\psi_0(x)\,,$$

ist **reell** und verschwindet nur im Unendlichen.
Wir definieren nun einen Differentialoperator 1. Ordung

$$A := \left(\frac{d}{dx} - \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}\right) \quad \text{mit} \quad \psi_0'(x) = \frac{d\psi_0(x)}{dx} .$$

a) Zeigen Sie, dass

$$A\psi_0(x) = 0 .$$

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass der zu A adjungierte Operator $A^\dagger$ durch

$$A^\dagger = \left(-\frac{d}{dx} - \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}\right)$$

gegeben ist.
(3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass

$$Hf(x) = (E_0 + A^\dagger A)f(x)$$

für eine beliebige Funktion $f(x)$ aus dem Hilbertraum gilt.
Hinweis: ψ_0'' kann mit Hilfe der Schrödingergleichung eliminiert werden.
(5 Punkte)

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{d\psi_0(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\psi_0(x)}\right) \cdot \psi_0(x) = 0$$

Viel Glück!