## Aufgabe 1:

(5 Punkte)

Bestimmen Sie den Typ der partiellen Differentialgleichung im $\mathbb{R}^2$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = xu$$

in Abhängigkeit vom Bereich, in dem die Punkte $(x, y)$ liegen. Skizzieren Sie außerdem den Bereich im $\mathbb{R}^2$, in dem die Differentialgleichung elliptisch ist.

## Aufgabe 2:

(5 Punkte)

Der Operator $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ sei gegeben durch

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} f(y)dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie den adjungierten Operator $T^*$. Entscheiden Sie, ob $T$ selbstadjungiert ist.

## Aufgabe 3:

(5 Punkte)

Lösen Sie mit dem Charakteristikenverfahren das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + (t^2 - 1)\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0, \qquad u(0, x) = u_0(x) = e^{-x}.$$

Führen Sie die Probe durch.

## Aufgabe 4:

(5 Punkte)

Lösen Sie das Sturm–Liouville-Eigenwertproblem mit gemischten Randbedingungen

$$-f''(x) = \lambda f(x), \quad x \in (0, 2\pi), \qquad f(0) = f'(2\pi) = 0,$$

d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda > 0$ und die zugehörigen Eigenfunktionen in $L^2(0, 2\pi)$.