1. Teil

In diesem Teil werden nur die Lösungen bewertet. Jede Frage kann mit wahr (w) oder falsch (f) beantwortet werden. Es werden nur diese Symbole (w) und (f) als gültige Antworten in der Tabelle unten gewertet. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Gar nicht oder ungültig beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe liegt immer zwischen 0 und 4 Punkten.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei A ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator in dem unendlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und E_λ sei die zugehörige Spektralschar aus dem Spektralsatz. Welche der folgenden Aussagen sind wahr **(w)** oder falsch **(f)**?

Aussage:	(w) oder (f)	
A besitzt mindestens einen Eigenwert	W	X
$(Ax, y) = (y, Ax)$ für alle $x, y \in \mathrm{dom}(A)$	w	X
$i \in \rho(A)$	f	X
$E_\lambda = E_\lambda^*$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$	w	✓

Bitte wenden!

2. Teil

Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Überprüfen Sie für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $u(t,x) = e^{ax}\sinh(t) + \cos(x)\sin(t)$ eine Lösung der Wellengleichung ist. Welchen Wert hat dann die Wellengeschwindigkeit?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Der lineare Operator $T : L^2(0,2\pi) \to L^2(0,2\pi)$ sei definiert durch $(Tf)(x) := h(x)f(x)$ mit

$$h(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{für } x \in (0,\pi), \\ 0 & \text{für } x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass T ein beschränkter Operator ist und geben Sie eine obere Schranke für die Operatornorm $\|T\|$ an.

(ii) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von T und geben Sie zu jedem Eigenwert mindestens eine zugehörige Eigenfunktion an.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

(i) Es sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine exponentiell beschränkte Funktion mit Schranke $\gamma \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Definition der Laplace-Transformation von f an und in welchen Punkten sie berechnet werden kann.

(ii) Bestimmen Sie die die Laplace-Transformation von $f(t) := e^{-t}$ für reelles $s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5: (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass der lineare Operator

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(T) &:= \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \;\middle|\; (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}, \\ T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

nicht beschränkt ist.