

### 1. Teil

In diesem Teil werden nur die Lösungen bewertet. Jede Frage kann mit wahr (w) oder falsch (f) beantwortet werden. Es werden nur diese Symbole (w) und (f) als gültige Antworten in der Tabelle unten gewertet. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Gar nicht oder ungültig beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe liegt immer zwischen 0 und 4 Punkten.

#### Aufgabe 1:

Es sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $K$  ein kompakter Operator in  $\mathcal{H}$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr (w) oder falsch (f)? (4 Punkte)

$$\dim \mathcal{H} = \infty$$

Aussage:	(w) oder (f)
$K$ kann unbeschränkt sein	w
$0 \in \sigma(K)$	w
$K$ ist automatisch selbstadjungiert	f
Das Bild von $K$ ist stets endlichdimensional	f

~~✓~~  
✓  
✓  
✓

Bitte wenden!

## 2. Teil

Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

- ✓ **Aufgabe 2:** (2 Punkte)  
Beweisen Sie, dass der lineare Operator

$$T : L^2(0, 42) \rightarrow L^2(0, 42), \quad Tf(x) = \sin(x)f(x),$$

beschränkt ist.

- ✓ **Aufgabe 3:** (3 Punkte)  
Gegeben seien die Vektoren

$$x = (1, 3, 5, 0, 0, 0, \dots), \quad y = (5, 0, -1, 4, 3, 0, 0, \dots) \quad \text{und} \quad z = (-2, -5, -10, 0, 0, 0, \dots)$$

im Hilbertraum  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Untersuchen Sie, welche Paare von diesen Vektoren zueinander orthogonal sind.

- ✓ **Aufgabe 4:** (2 Punkte)  
Bestimmen Sie vollständig das Spektrum des linearen Operators

$$M : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Argumentieren Sie, warum  $\rho(M) = \mathbb{C} \setminus \sigma_p(M)$ .

- ~ **Aufgabe 5:** (3 Punkte)  
Es seien  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{K}$  Hilberträume und  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ .

- (i) Wie ist der adjungierte Operator  $T^*$  von  $T$  definiert?
- (ii) Wann heißt  $T$  selbstadjungiert?
- (iii) Zeigen Sie, dass  $TT^*$  ein selbstadjungierter Operator ist.

- ✓ **Aufgabe 6:** (2 Punkte)  
Überprüfen Sie, für welche Werte von  $a$  die Funktion  $u(t, x) = e^{t+ax} - \sin(2t - 3x)$  eine Lösung der Wellengleichung ist. Welchen Wert hat dann die Wellengeschwindigkeit?