# 1. Teil

**In diesem Teil werden nur die Lösungen bewertet. Jede Frage kann mit wahr (w) oder falsch (f) beantwortet werden. Es werden nur diese Symbole (w) und (f) als gültige Antworten in der Tabelle unten gewertet. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Gar nicht oder ungültig beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe liegt immer zwischen 0 und 4 Punkten.**

## Aufgabe 1: (4 Punkte)

Gegeben sei der lineare Operator

$$T : L^2(-1,1) \to L^2(-1,1), \qquad (Tf)(x) = xf(x).$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr **(w)** oder falsch **(f)**?

| Aussage: | (w) oder (f) |
|---|---|
| $\|T\| \leq 1$ | |
| $T$ hat mindestens einen Eigenwert | w |
| $2 \in \sigma(T)$ | |
| $T$ ist selbstadjungiert | W |

0/4

*Bitte wenden!*

## 2. Teil

**Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.**

**Aufgabe 2:** (2 Punkte)

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$u(x, y) = xe^{\lambda y}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung der Laplace-Gleichung?

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)

Es sei $V$ ein Vektorraum.

(i) Welche Voraussetzungen muss eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ erfüllen, um ein Skalarprodukt über $\mathbb{C}$ zu sein.

(ii) Wie lautet die Definition der zu einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ assoziierten Norm?

(iii) Geben Sie ein Beispiel für einen Hilbertraum und dem dazugehörenden Skalarprodukt an.

**Aufgabe 4:** (2 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte (d.h. das Punktspektrum) und Eigenvektoren des linearen Operators

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \quad (x_n)_n \mapsto \left(\frac{1}{n^2} x_n\right)_n.$$

**Aufgabe 5:** (2 Punkte)

Bestimmen Sie den Typ der partiellen Differenzialgleichung im $\mathbb{R}^2$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial u}{\partial y}$$

(in Abhängigkeit vom Bereich, in dem die Punkte $(x, y)$ liegen).

**Aufgabe 6:** (2 Punkte)

Weisen Sie nach, dass der Operator $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$T(x_n)_n = (nx_n)_n = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4, \dots),$$

*nicht* beschränkt ist.

Achtung: sinnvoller Def. bereich