KFU Graz
TU Graz

W. Schweiger

# Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen
# WS 15/16

## Abschlussklausur, 14. März 2016

Versuchen Sie die nachfolgenden Fragen (unter Verwendung der mathematischen Schreibweise) so kurz und präzise wie möglich zu beantworten und keine Romane zu schreiben!

**Frage 1: (Hilberträume)** $\mathcal{H}$ sei ein komplexer Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle \ldots \rangle$ definiert ist.

a) Welche zusätzliche Eigenschaft macht diesen Innenproduktraum zu einem Hilbertraum und was bedeutet diese Eigenschaft?

b) Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum mit Skalarprodukt, der kein Hilbertraum ist. Führen Sie das Skalarprodukt explizit an.

c) Wie können Sie die Tatsache, dass $B = \{b_1, b_2, \ldots\} \subset \mathcal{H}$ ein Orthonormalsystem darstellt mathematisch kurz und bündig hinschreiben?

d) Geben Sie zumindest 2 (äquivalente) Kriterien dafür an, dass ein Orthonormalsystem $B \subset \mathcal{H}$ auch eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ darstellt.

e) Wie sieht die Orthogonalbasis von $L^2[-\pi, \pi]$ aus, die zur üblichen reellen Form der Fourierreihe führt?

f) Wie sieht die reelle Form der Fourierreihe für Funktionen $f \in L^2[-\pi, \pi]$ aus, wie bestimmt man die Koeffizienten und was können Sie über die Konvergenz der Reihe sagen, wenn $f \in L^2[-\pi, \pi]$?

(8 Punkte)

**Frage 2: (Fouriertransformation)**

a) Wie ist die Fouriertransformation für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiert?

b) Sei nun $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $f' \in L^1(\mathbb{R})$, wobei $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Wie sieht die Fouriertransformation von $f'$ aus?

c) Für welchen Unterraum von $L^1(\mathbb{R})$ stellt die Fouriertransformation eine bijektive Abbildung dar? Was zeichnet diesen Unterraum aus?

d) Wie sieht das (beidseitige) Faltungsintegral $(f_1 * f_2)(x)$ aus und welcher Zusammenhang besteht zwischen der Fouriertransformation des Faltungsintegrals $FT(f_1 * f_2)(p)$ und den Fouriertransformationen $FT(f_i)(p)$ der der einzelnen Funktionen?

(5 Punkte)

**Frage 3: (Funktionale und Distributionen)**
$V$ sei ein Vektorraum über dem Skalarenkörper $\mathbb{K}$.

a) Was ist ein Funktional?

b) Distributionen sind spezielle Funktionale. Auf welchem Vektorraum sind Distributionen definiert und welche beiden Forderung müssen sie erfüllen?

c) Was ist eine reguläre Distribution und was versteht man unter dem "Kern" einer regulären Distribution?

d) Wie ist die Ableitung einer (nicht notwendigerweise regulären) Distribution definiert?

e) Der Kern der Stufenfunktion $\theta_{x_0}$ ist $\theta(x - x_0)$. Was ist der Kern der Ableitung der Stufenfunktion $\theta'_{x_0}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Wie ist die Fouriertransformation einer Distribution allgemein definiert?

2) Wie sieht der Kern der Fouriertransformierten von $\delta_{x_0}$ aus?

**(9 Punkte)**

**Frage 4: (Orthogonale Funktionensysteme)** Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ stellen für quadratintegrierbare Funktionen auf der Oberfläche der Einheitskugel $L^2(S^2)$ ein **Orthonormalsystem** dar.

a) Wie lautet die Orthonormalitätsrelation?

b) Die Entwicklung einer beliebigen Funktion $f \in L^2(S^2)$ nach Kugelflächenfunktionen lautet

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm} Y_l^m(\theta, \phi)$$

Wie berechnet man die Entwicklungskoeffinzienten $f_{lm}$?

c) Benutzen Sie das Ergebnis aus b), um die "Zerlegung der Einheit"

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta', \phi')^* Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{\delta(\theta - \theta')\delta(\phi - \phi')}{\sin(\theta)}$$

zu beweisen, indem Sie $f(\theta, \phi) = \delta(\theta - \theta')\delta(\phi - \phi')$ setzen.

**(4 Punkte)**

**Frage 5: (Lineare Operatoren)** Ein linearer Operator $\hat{A} = (D, A)$ in einem (komplexen) Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein lineare Abbildungen $A : D \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

a) Wann ist $\hat{A}$ ein **beschränkter** Operator?

b) Was können Sie über den Definitionsbereich eines beschränkten linearen Operators sagen?

c) Nennen Sie 2 Klassen vom beschränkten linearen Operatoren. Was sind ihre definierenden Eigenschaften?

d) Wann ist ein beschränkter linearer Operator symmetrisch? Ist er auch automatisch selbstadjungiert?

~ e) Wie würden Sie die Exponentialfunktion $\exp(\hat{A})$ eines beschränkten linearen Operators definieren (und berechnen)?

f) Was versteht man unter der **Resolventenmenge** $\rho(\hat{A})$ eines linearen Operators $\hat{A} = (D, A)$, was unter seinem **Spektrum** $\sigma(\hat{A})$?

**(7 Punkte)**

**Frage 6: (Partielle Differenzialgleichungen)** Die allgemeinste semilineare partielle DGL 2. Ordnung in 2 Variablen lässt sich in der Form

$$A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + F(x, y, u_x, u_y, u) = 0$$

schreiben.

2 a) Welche Einschränkungen müssen die Koeffizienten $A$, $B$ und $C$ erfüllen, damit diese DGL elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch ist?

b) Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel für eine lineare parabolische DGL 2. Ordnung?

c) Auf welche Gleichungen führt die Separation der Variablen, wenn Sie diese auf Ihr Beispiel aus Punkt b) anwenden?

~ d) Eine allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x, t) = 0 \quad \text{ist} \quad u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

wobei $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ 2-mal stetig differenzierbare Funktionen des Arguments $z$ sein sollen. Wie müssen $\varphi$ und $\psi$ gewählt werden, damit die **Anfangsbedingungen** $u(x, 0) = f(x)$ und $\partial u(x, 0)/\partial t = 0$ gelten? Wie sieht $u(x, t)$ aus?

**(7 Punkte)**

39