Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen

Abschlussklausur, 17. Oktober 2016

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1:	Punkte
Aufgabe 2:	Punkte
Aufgabe 3:	Punkte
Aufgabe 4:	Punkte
Aufgabe 5:	Punkte
Aufgabe 6:	Punkte
Gesamt:	Punkte

KFU Graz
TU Graz

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen
WS 15/16

Abschlussklausur, 17. Oktober 2016

Versuchen Sie die nachfolgenden Fragen (unter Verwendung der mathematischen Schreibweise) so kurz und präzise wie möglich zu beantworten und keine Romane zu schreiben!

Frage 1: (Hilberträume) $\mathcal{H}$ sei ein komplexer Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ definiert ist.

a) Welche zusätzliche Eigenschaft macht diesen Innenproduktraum zu einem Hilbertraum und was bedeutet diese Eigenschaft?

b) Geben Sie ein Beispiel für einen ∞-dimensionalen Hilbertraum. Führen Sie das Skalarprodukt explizit an.

c) Wie können Sie die Tatsache, dass $B = \{b_1, b_2, \ldots\} \subset \mathcal{H}$ ein Orthonormalsystem darstellt mathematisch kurz und bündig hinschreiben?

d) Wie sehen die beiden Parseval'schen Identitäten aus?.

e) Wie sieht die Orthonormalbasis von $L^2[-\pi, \pi]$ aus, die zur **komplexen** Form der Fourierreihe führt?

f) Wie sieht die komplexe Form der Fourierreihe für Funktionen $f \in L^2[-\pi, \pi]$ aus, wie bestimmt man die Koeffizienten und was können Sie über die Konvergenz der Reihe sagen, wenn $f \in L^2[-\pi, \pi]$?

(8 Punkte)

Frage 2: (Integraltransformationen) $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion vom exponentiellen Typ.

a) Wie ist die Laplace-Transformation $L(f)(p)$ von f definiert?

b) Wie hängt $L(f')(p)$ mit $L(f)(p)$ zusammen, wenn $f'(t) = df(t)/dt$ die Ableitung von f ist?

c) Wie kann man mit Hilfe der Laplace-Transformation Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen lösen?

d) Die Laplace-Transformierten zweier Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ seien $F(p)$ bzw. $G(p)$. Wie sieht die inverse Laplace-Transformierte des Produktes von F und G, also $L^{-1}(F \cdot G)(t)$, aus?

(5 Punkte)

Frage 3: (Funktionale und Distributionen)
V sei ein Vektorraum über dem Skalarenkörper $\mathbb{K}$.

a) Was ist ein Funktional?

b) Distributionen sind spezielle Funktionale. Auf welchem Vektorraum sind Distributionen definiert und welche beiden Forderung müssen sie erfüllen?

c) Was ist eine reguläre Distribution und was versteht man unter dem "Kern" einer regulären Distribution?

d) Wie ist die Ableitung einer (nicht notwendigerweise regulären) Distribution definiert?

e) Der Kern der Stufenfunktion θ_{x_0} ist $\theta(x-x_0)$. Was ist der Kern der Ableitung der Stufenfunktion θ'_{x_0}? Begründen Sie Ihre Antwort.

f) Wie ist die Fouriertransformation einer Distribution allgemein definiert?

g) Wie sieht der Kern der Fouriertransformierten von δ_{x_0} aus?

(9 Punkte)

Frage 4: (Orthogonale Funktionensysteme) Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\phi)$ stellen für quadratintegrierbare Funktionen auf der Oberfläche der Einheitskugel $L^2(S^2)$ ein **Orthonormalsystem** dar.

a) Wie lautet die Orthonormalitätsrelation?

b) Die Entwicklung einer beliebigen Funktion $f \in L^2(S^2)$ nach Kugelflächenfunktionen lautet

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}\, Y_l^m(\theta,\phi)$$

Wie berechnet man die Entwicklungskoeffizienten f_{lm}?

c) Benutzen Sie das Ergebnis aus b), um die "Zerlegung der Einheit"

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta',\phi')^* Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{\sin(\theta)}$$

zu beweisen, indem Sie $f(\theta,\phi) = \delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$ setzen.

(4 Punkte)

Frage 5: (Lineare Operatoren) Ein linearer Operator $\hat{A} = (D, A)$ in einem (komplexen) Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein lineare Abbildungen $A : D \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

a) Wann ist der Operator $\hat{A}$ dicht definiert?

b) Wie führt man den adjungierte Operator $\hat{A}^\dagger = (D^*, A^\dagger)$ zu einem dicht definierten Operator $\hat{A} = (D, A)$ ein? Was können Sie über seine Existenz und Eindeutigkeit sagen?

c) Was ist ein symmetrischer Operator und wann ist ein symmetrischer Operator selbstadjungiert?

d) Wie ist die Norm eines beschränkten Operators $\hat{A} = (D, A)$ üblicherweise definiert?

e) Für einen beschränkten Operator $\hat{A} = (D, A)$ sei $\|A\| < 1$. Wie könnten Sie dann $(1 - A)^{-1}$ berechnen?

f) Was versteht man unter der **Resolventenmenge** $\rho(\hat{A})$ eines linearen Operators $\hat{A} = (D, A)$, was unter seinem **Spektrum** $\sigma(\hat{A})$?

(7 Punkte)

Frage 6: (Partielle Differenzialgleichungen) Die allgemeinste semilineare partielle DGL 2. Ordnung in 2 Variablen lässt sich in der Form

$$A(x,y)u_{xx}(x,y) + 2B(x,y)u_{xy}(x,y) + C(x,y)u_{yy}(x,y) + F(x,y,u_x,u_y,u) = 0$$

schreiben.

a) Welche Einschränkungen müssen die Koeffizienten A, B und C erfüllen, damit diese DGL elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch ist?

b) Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel für eine lineare parabolische DGL 2. Ordnung?

c) Auf welche Gleichungen führt die Separation der Variablen, wenn Sie diese auf Ihr Beispiel aus Punkt b) anwenden?

d) Eine allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0 \quad \text{ist} \quad u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at),$$

wobei $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ 2-mal stetig differenzierbare Funktionen des Arguments z sein sollen. Wie müssen φ und ψ gewählt werden, damit die **Anfangsbedingungen** $u(x,0) = f(x)$ und $\partial u(x,0)/\partial t = 0$ gelten? Wie sieht $u(x,t)$ aus?

(7 Punkte)