KFU Graz
TU Graz

W. Schweiger

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen
WS 15/16

Abschlussklausur, 30. Mai 2016

Versuchen Sie die nachfolgenden Fragen (unter Verwendung der mathematischen Schreibweise) so kurz und präzise wie möglich zu beantworten und keine Romane zu schreiben!

Frage 1: (Hilberträume) $\mathcal{H}$ sei ein komplexer Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ definiert ist.

a) Welche zusätzliche Eigenschaft macht diesen Innenproduktraum zu einem Hilbertraum und was bedeutet diese Eigenschaft?

b) Geben Sie ein Beispiel für einen ∞-dimensionalen Hilbertraum. Führen Sie das Skalarprodukt explizit an.

c) Wie können Sie die Tatsache, dass $B = \{b_1, b_2, \ldots\} \subset \mathcal{H}$ ein Orthonormalsystem darstellt mathematisch kurz und bündig hinschreiben?

d) Wie sehen die beiden Parseval'schen Identitäten aus?

e) Wie sieht die Orthonormalbasis von $L^2[-\pi,\pi]$ aus, die zur **komplexen** Form der Fourierreihe führt?

f) Wie sieht die komplexe Form der Fourierreihe für Funktionen $f \in L^2[-\pi,\pi]$ aus, wie bestimmt man die Koeffizienten und was können Sie über die Konvergenz der Reihe sagen, wenn $f \in L^2[-\pi,\pi]$?

(8 Punkte)

Frage 2: (Fouriertransformation)

a) Wie ist die Fouriertransformation für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiert?

b) Sei nun f, f' und $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, wobei $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Wie sieht die Fouriertransformation von f'' aus?

c) Für welchen Unterraum von $L^1(\mathbb{R})$ stellt die Fouriertransformation eine bijektive Abbildung dar? Was zeichnet diesen Unterraum aus?

d) Wie sieht das (beidseitige) Faltungsintegral $(f_1 * f_2)(x)$ aus und welcher Zusammenhang besteht zwischen der Fouriertransformation des Faltungsintegrals $FT(f_1 * f_2)(p)$ und den Fouriertransformationen $FT(f_i)(p)$ der der einzelnen Funktionen?

(5 Punkte)

Frage 3: (Funktionale und Distributionen)
V sei ein Vektorraum über dem Skalarenkörper $\mathbb{K}$.

a) Was ist ein lineares Funktional auf V, was der (algebraische) Dualraum von V?

b) Was wissen Sie über den Raum der **stetigen** linearen Funktionale auf einem Hilbertraums $\mathcal{H}$?

c) Auf welchem Vektorraum sind Distributionen definiert und welche Forderung müssen sie zusätzlich zur Linearität erfüllen?

d) Was ist eine "reguläre" Distribution?

e) Wie wirkt die Ableitung der Stufenfunktion θ'_{x_0} (mit Kern $\theta'(x - x_0)$) auf eine Testfunktion?

f) Wie sieht der Kern der Fouriertransformierten von θ'_{x_0} aus?

(9 Punkte)

Frage 4: (Klassische orthogonale Polynome) In der Vorlesung wurden (reelle) Polynomsysteme $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ besprochen, die in einem Teilintervall von $\mathbb{R}$ Orthogonalitätsrelationen der Form

$$\langle p_i, p_j \rangle = \int_a^b dx \rho(x)\, p_i(x) p_j(x) = N_i\, \delta_{ij}$$

erfüllen, wobei $\rho(x)$ eine (positive) Gewichtsfunktion ist und N_i ein geeigneter Normierungsfaktor.

a) Was sind die Werte von a und b für Laguerre-Polynome und wie sieht der zugehörige Gewichtsfaktor $\rho(x)$ aus? Bei welchen physikalischen Problemen braucht man Laguerre-Polymome?

b) Berechnen Sie p_0, p_1 und p_2 für den Fall, dass $a = -1$, $b = 1$, $\rho(x) = 1$ und $N_i = 2/(2i + 1)$.

c) Viele der klassischen orthogonalen Polynome lassen sich mittels einer "erzeugenden Funktion" $\phi(x, h)$ berechnen. Wie hängen erzeugende Funktion und die daraus zu gewinnenden Polynome $p_i(x)$ formal zusammen und wie lässt sich dann $p_i(x)$ aus $\phi(x, h)$ gewinnen?

(5 Punkte)

Frage 5: (Lineare Operatoren) Ein linearer Operator $\hat{A} = (D, A)$ in einem (komplexen) Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein lineare Abbildungen $A : D \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

a) Wann ist der lineare Operator $\hat{A}$ dicht definiert?

b) Wann ist ein dicht definierter linearer Operator $\hat{A}$ beschränkt?

c) Was können Sie über den Definitionsbereich eines (dicht definierten) beschränkten linearen Operators sagen?

d) Nennen Sie 2 Klassen von beschränkten linearen Operatoren. Was sind ihre definierenden Eigenschaften?

e) Wann ist ein beschränkter linearer Operator selbstadjungiert?

f) Was wissen Sie über die Anzahl der Eigenwerte eines selbstadjungierten, beschränkten, linearen Operators? Was können Sie über die zugehörigen Eigenvektoren sagen, wenn $\mathrm{Ker}(A) = 0$?

(7 Punkte)

Frage 6: (Partielle Differenzialgleichungen) Die allgemeinste semilineare partielle DGL 2. Ordnung in 2 Variablen lässt sich in der Form

$$A(t,x)u_{tt}(t,x) + 2B(t,x)u_{tx}(t,x) + C(t,x)u_{xx}(t,x) + F(t,x,u_t,u_x,u) = 0$$

schreiben.

a) Wie muss $F(t,x,u_t,u_x,u)$ aussehen, damit es sich nicht nur um eine semilineare, sondern um eine lineare Differenzialgleichung handelt?

b) Wann ist diese Differenzialgleichung hyperbolisch?

c) Wie kommt man durch Separation der Variablen von der Diffusionsgleichung

$$u_{xx}(t,x) = \frac{1}{\kappa}u_t(t,x)$$

auf die Helmholtz-Gleichung

$$X_{xx}(x) + k^2 X(x) = 0 \qquad ()$$

für den Ortsanteil $X(x)$ der Lösung?
(Die möglichen Werte von k resultieren dabei aus Randbedingungen.)

d) Wie sieht dann die Differenzialgleichung für den Zeitanteil $T(t)$ aus und wie ihre Lösung?

e) Was unterscheidet generell gewöhnliche von partiellen Differenzialgleichungen? Was ist die "Ordnung" einer Differenzialgleichung?

(6 Punkte)