Aufgabe 1 (Funktionenräume)

(a) Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Geben Sie die definierenden Eigenschaften einer Norm an. Erzeugt die Vorschrift

$$||x|| := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

mit $x \in \mathbb{V}$ eine Norm? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Durch welche Eigenschaft wird ein Banachraum zu einem Hilbertraum? Durch welche Eigenschaft wird ein Innenproduktraum zu einem Hilbertraum, und was bedeutet diese Eigenschaft?

(c) Was ist ein Orthonormalsystem? Geben Sie mindestens zwei (äquivalente) Kriterien an, unter welchen ein Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis wird.

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Fourierreihen)

(a) Wie lautet die Definition der Fourierreihe, und wie berechnet man ihre Koeffizienten?

(b) Sei f eine reellwertige Funktion. Leiten Sie die Beziehung zwischen den Koeffizienten c_n und c_{-n} her.

(c) Eine periodische Funktion f auf dem Periodizitätsintervall $-1 < x \leq 1$ sei gegeben durch

$$f(x) = 2x \qquad -1 < x \leq 1\,.$$

Ist die Fourierreihe dieser Funktion punktweise konvergent? Ist sie gleichmäßig konvergent? In beiden Fällen: Falls ja – warum? Falls nein – was müsste dazu erfüllt sein? (Sie müssen die Fourierreihe nicht explizit ausrechnen.)

(10 Punkte)

Aufgabe 3 (Integraltransformationen)

(a) Wie lautet die Definition der Fouriertransformation? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Fouriertransformierte einer Funktion existiert?

(b) Beweisen Sie **eine** der folgenden Eigenschaften: (i) Die Fouriertransformierte einer Funktion f ist beschränkt; (ii) die Fouriertransformierte einer Funktion f ist stetig.

(c) Gegeben sei eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Wie lautet die Fouriertransformierte der Ableitung f'?

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Funktionale)

(a) Was ist ein lineares Funktional?

(b) Was ist eine reguläre bzw. was ist eine singuläre Distribution? Nennen Sie jeweils ein Beispiel.

(c) Verwenden Sie die Eigenschaften von Distributionen, um folgende Relation zu beweisen, wobei Θ die Heavyside-Funktion bezeichnet:

$$\frac{d}{dx}\,\Theta(x-x_0) = \delta(x-x_0)\,.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 5 (Operatoren)

(a) Wann ist ein linearer Operator A auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ beschränkt? Geben Sie ein Beispiel für einen beschränkten und einen unbeschränkten Operator an.

(b) Sei A ein linearer beschränkter Operator mit $||A|| < 1$. Zeigen Sie, dass der Operator $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ ebenfalls beschränkt ist.

(c) Ein linearer Operator A auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2[a,b]$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, sei definiert durch

$$Au = i\,\frac{du}{dx}\,, \quad \mathcal{D}_A = \left\{u \in \mathcal{H}\,\middle|\, u \,\text{absolut stetig},\, u' \in \mathcal{H},\, u(a) = zu(b),\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\right\}.$$

Bestimmen Sie den adjungierten Operator $A^\dagger$. Unter welchen Bedingungen an z wird A selbstadjungiert?

(10 Punkte)

Aufgabe 6 (Spektrum)

(a) Wie ist die Resolventenmenge und wie ist das Punktspektrum eines linearen Operators definiert?

(b) Sei P ein orthogonaler Projektor und $z \in \mathbb{C}$. Wie lautet $(P-z)^{-1}$, und für welche z ist dieser Operator wohldefiniert?

(c) Gegeben sei ein Sturm-Liouville-Problem der Form

$$(pu')' + (-q + \lambda w)\,u = 0\,, \qquad p(x)\left(v(x)^* u'(x) - v'(x)^* u(x)\right)\Big|_a^b = 0$$

mit $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass der zugehörige Sturm-Liouville-Operator selbstadjungiert wird. Wie lautet das entsprechende Skalarprodukt? Wie heißen die Eigenfunktionen dieses Operators?

(10 Punkte)