Quantenmechanik Abschlusstest SS 2014

- Name und Matrikelnummer:
- Jahrgang des verwendeten QM-Skriptums:
- **In welchem Jahr haben Sie die QM-Übungen besucht ?**
- **Sie müssen in jedem Fall das Aufgabenblatt abgeben !**
- Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. **Bitte geben Sie auf *jedem* abgegebenen Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.**
- Zulässige Hilfsmittel: QM-Skriptum, und die eigenen Übungen.
- Bitte geben Sie zu verwendeten Formeln die *Quelle* an, wie zum Beispiel "Aufgabe 21", bzw. "Gl.(2.34)".

Aufgabe 1: Störungsrechung im Potenzialtopf *(10 Punkte)*

Ein Teilchen der Masse m sei in einer Dimension in folgendem unendlich tiefen Potenzialtopf gebunden:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \lambda x & 0 \leq x \leq L \\ \infty & x > L \end{cases}$$

a) Geben Sie alle Energien und Eigenzustände des ungestörten Systems an.

b) Berechnen Sie die Korrektur erster Ordnung in λ zu allen Energien E_n.

c) Geben Sie die Korrektur der Eigenenergien in der Ordnung λ^2 und die der Eigenfunktionen in der Ordnung λ an. Es reicht aus in Teil (c) das Ergebnis in Form von Integralen anzugeben, die nicht ausgewertet werden müssen.

Hinweise: Die Wellenfunktionen müssen nicht normiert werden, d.h. die Normierungskonstante kann stehen bleiben.
Weiters kann die Beziehung $2\sin^2 y = 1 - \cos(2y)$ hilfreich sein.

Aufgabe 2: Doppeltes δ-Potential

(10 Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich in einer Dimension im Potential

$$V(x) = -V_0 \frac{\hbar^2}{2m}(\delta(x-a) + \delta(x+a))$$

mit $V_0 > 0$ und $a > 0$.

a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator mit dem Paritätsoperator vertauscht. Was bedeutet das für die Eigenzustände des Hamiltonoperators?

b) Lösen Sie die eindimensionale Schrödingergleichung für gebundene Zustände. Rechnen Sie dabei getrennt für die unterschiedlichen Eigenzustände des Paritätsoperators. Sie erhalten in beiden Fällen eine transzendente Gleichung der Form

$$V_0 a = \ldots$$

die sich nicht weiter auflösen lässt.

c) Skizzieren Sie die Wellenfunktionen.

d) Lösen Sie die beiden transzendenten Gleichungen im Grenzfall großer Energien (mit $\tanh x \approx 1$ für $x \gg 1$).

Aufgabe 3: Unbestimmtheitsrelation

(10 Punkte)

Gesucht ist eine Unschärferelation zwischen Ort $\hat{Q}$ und Energie $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(\hat{Q})$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{Q}, \hat{P}^2]$ und $[\hat{Q}, V(\hat{Q})]$.

b) Benutzen Sie das Ergebnis aus a) und die Unbestimmheitsrelation aus dem mathematischen Anhang des Skripts, um zu zeigen, dass gilt:

$$\sigma_Q \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle \hat{P} \rangle|,$$

mit den Standardabweichungen σ_Q und σ_H.