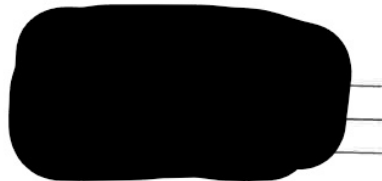


Quantenmechanik  
Sommersemester 2015  
1. Klausur  
01.07.2015  
Bearbeitungszeit: max. 240 Minuten

Vorname:  
Nachname:  
Matrikelnummer:



Schreiben Sie bitte Ihren Namen auf dieses und jedes weitere Blatt für den Fall, dass die Seiten getrennt werden.

Zugelassene Hilfsmittel:  
Vorlesungsskript und 1 doppelseitig händisch beschriebenes DIN-A4-Blatt

**Aufgabe 1: Potenzialprobleme** ..... 10 Punkte

(a) [5 Punkte] **Oszillator im elektrischen Feld**

Für einen harmonischen Oszillator im elektrischen Feld  $\vec{E} = E_e \vec{e}_x$  laute der Hamiltonoperator in geeignet gewählten Einheiten

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \hat{x}^2) - qE_e \hat{x}.$$

- i. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte!
- ii. Berechnen Sie  $\langle n | \hat{x} | n \rangle$ !

Hinweise:

- Erinnern Sie sich an die Übungen und benutzen Sie  $\hat{a}^\dagger$  und  $\hat{a}$ !
- In den gewählten Einheiten gilt  $m = \hbar = \omega = 1$ .

(b) [5 Punkte] **Oszillator mit Wand**

Gegeben sei ein Oszillator, der durch eine Wand begrenzt wird. Das Potenzial nimmt dann folgende Form an:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , x \leq 0, \\ \frac{m\omega^2}{2} x^2 & , x > 0. \end{cases}$$

- i. Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung und die Randbedingung bei  $x = 0$  auf!
- ii. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und -funktionen!
- iii. Geben Sie den Grundzustand in Ortsdarstellung und dessen Energie an!

Hinweis:

- Betrachten Sie die Lösungen des Oszillators *ohne* Wand! Welche Lösungen erfüllen die Randbedingung bei  $x = 0$ , d.h. *mit* Wand?

**Aufgabe 2: Näherungsverfahren** ..... 10 Punkte

Wir betrachten erneut den Oszillator mit Wand (Aufgabe 1.b). Das Potenzial lautet

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , x \leq 0, \\ \frac{m\omega^2}{2}x^2 & , x > 0. \end{cases}$$

Es soll in Ortsdarstellung gearbeitet werden. Der Variationsansatz lautet

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0, \\ \mathcal{C}xe^{-\alpha x} & , x > 0, \end{cases}$$

mit dem Variationsparameter  $\alpha > 0$ .

- Schätzen Sie nach dem Ritz'schen Variationsverfahren die Grundzustandsenergie ab!  
Zwischenergebnis:  $\langle H \rangle_{\varphi_\alpha} = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 + \frac{3}{2}m\omega^2\frac{1}{\alpha^2}$ .
- Vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung  $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ ! Was bedeutet das Ergebnis für die gewählte Ansatzwellenfunktion  $\varphi_\alpha(x)$ ?

Hinweis:

$$\int_0^\infty q^n e^{-\gamma q} dq = \frac{n!}{\gamma^{n+1}}$$

**Aufgabe 3: Drehimpuls** ..... 10 Punkte

Seien  $|m\rangle$ ,  $m = -1, 0, 1$  die Eigenzustände von  $S_z$  mit Eigenwerten  $\hbar m$ . Für ein Spin-Einsteilchen werden die Spinoperatoren dargestellt durch

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei  $|\Psi\rangle := \frac{1}{2}(|1\rangle + \sqrt{2}|0\rangle + |-1\rangle)$ .

- Was ist der Erwartungswert von  $S_x$  im Zustand  $|\Psi\rangle$ ? Was schließen Sie daraus für die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messwerte von  $S_x$  im Zustand  $|\Psi\rangle$ ?
- Der Hamiltonoperator des Systems sei durch  $\hat{H} := \frac{q\hbar}{2Mc} \vec{B} \cdot \vec{S}$  gegeben, wobei das Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)^T$  mit  $B = \text{const.}$  Schreiben Sie den Zeitentwicklungsoperator  $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$  in Spektraldarstellung! Wie lauten seine Eigenwerte? (*Hinweis: Sie benötigen dafür die Eigenwerte des Hamiltonoperators.*)
- Wie üblich gilt  $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi\rangle$ . Das System befinde sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Zustand  $|\Psi\rangle$ . Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung von  $S_x$  zum Zeitpunkt  $t > 0$  den Wert  $+\hbar$  zu messen.