Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Datenanalyse UE
SS 2021

Übungsklausur

08.06.2021

Rechnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Beispiel 1 Γ-Verteilung (5 Punkte)

a) **Rechenteil (3 Punkte):**

Gegeben sei die Γ-Verteilung

$$p(x) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-ax} \qquad x > 0 \ ,$$

wobei zusätzlich $a > 0$ und $b > 0$ gelten soll. Die zugehörige charakterstische Funktion lautet

$$\Phi(\omega) = \left(\frac{a}{a - i\omega}\right)^b .$$

Berechnen Sie nun die Normierung (**1P**) den Erwartungswert (**1P**) und die Varianz (**1P**) dieser Verteilung. Es obliegt Ihnen, ob Sie hierzu die Wahrscheinlichkeitsdichte oder charakteristische Funktion verwenden möchten.

Hinweis: Man kann die Rechnungen etwas vereinfachen, indem man Zwischenergebnisse etwas umschreibt. Für die charakteristische Funktion kann man z.B. $\Phi'(\omega) = f(\omega)\Phi(\omega)$ schreiben.

b) **Verständnisteil (2 Punkte):**

Welche **drei** Eigenschaften muss eine Funktion erfüllen, damit diese als Wahrscheinlichkeitsdichte in Betracht kommen kann? Begründen Sie auch kurz, wieso diese gelten müssen? (**1,5P**)

In welchem wesentlichen Punkt unterscheiden sich eine Wahrscheinlichkeit und eine Wahrscheinlichkeitsdichte (**0,5P**)?

Hinweis: Wie hängen Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichte zusammen? Welche Werte kann eine Wahrscheinlichkeit annehmen? Welche eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

Beispiel 2 Parameterschätzen (8 Punkte)

a) **Rechenteil (4 Punkte):**

Wir wollen einen Widerstand R bestimmen. Hierzu führen wir ein Experiment durch, in dem wir eine feste Spannung U vorgeben und den elektrischen Strom I messen. Wie bei Experimenten üblich erhalten wir nicht den tatsächlichen Wert sondern einen verrauschten Wert. Wir gehen von einem additiven Gauss'schen Rauschen aus

$$d_i = I + \eta_i .$$

Bestimmen Sie nun mithilfe des Ohmschen Gesetzes

$$I = \frac{U}{R}$$

einen Schätzwert für R. Gehen Sie dabei von $\mathbf{d} = \{d_1,d_2,...,d_N\}$ Datenpunkten aus.

Bestimmen Sie zunächst den Maximum-Likelihood-Schätzwert (**2P**). Bestimmen Sie als nächstes den Maximum-a-posterior-Schätzwert (**2P**). Verwenden Sie hierzu den folgenden Prior

$$p(R|\alpha,\mathcal{B}) = \frac{1}{Z}e^{-\frac{\alpha}{R}}.$$

Hinweis: Man kann dieses Beispiel auf verschiedene Arten lösen: Man kann zu Beginn I durch U und R ausdrücken und direkt R_{ML} bzw. R_{MAP} ausrechnen. Alternativ kann man auch zuerst I_{ML} bzw. I_{MAP} berechnen und dieses Ergebnis benutzen, um R_{ML} bzw. R_{MAP} zu berechnen. In diesem Fall müsste man im Prior die Ersetzung $\frac{\alpha}{R} \to \beta I$ durchführen.

b) **Verständnisfragen (4 Punkte):**

Wir wollen einen Parameter abschätzen, von dem wir im Vorfeld wissen, dass der Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 sind. Wie kann man mit diesen Informationen einen vernünftigen Prior bestimmen? Wie heißt dieses Verfahren? Schreiben Sie auch die Langrangefunktion für diesen Fall nieder (kontinuierlicher Fall!). Der Prior muss **nicht** berechnet werden. (**2P**)

Worin unterscheiden sich Maximum-a-poseriori-Schätzwert und Maximum-Likelihood-Schätzwert im Bezug auf potentielles Vorwissen? Würde es bei einem flachen (uninformativen) Prior Sinn machen beide zu berechnen? (**1P**).

Ein Schätzwert kann verzerrt oder unverzerrt sein. Ist es entscheidend, welche dieser Eigenschaften zutrifft oder kann man diese ignorieren? Wieso? Wieso nicht? (**1P**)

Beispiel 3 Hypothesentests (7 Punkte)

a) **Rechenteil (4 Punkte)**

Wir haben zwei Würfel sowie zwei Münzen. Ein Würfel und eine Münze sind fair, während ein Würfel und eine Münze manipuliert sind. Die Wahrscheinlichkeit einen 6er zu würfeln, sei für den manipulierten Würfel $p_{\text{Würfel}} = 0{,}2$ und die Wahrscheinlichkeit bei der manipulierten Münze das Ergebnis Kopf zu erhalten $p_{\text{Kopf}} = 0{,}6$. Sie haben nun zwei Optionen:

1. Würfel und Münze sind fair
2. Würfel und Münze sind manipuliert

Sie wählen zufällig eine Option aus. Sie würfeln 50 Mal und erhalten 20 Mal die Augenzahl 6. Berechnen Sie den Posterior (**1P**) sowie das ODDS-Ratio (**1P**). Um sicher zu gehen, werfen Sie zusätzlich noch die Münze 100 Mal und erhalten 55 Mal Kopf. Berechnen Sie nun für dieses "Mehrfachexperiment" den Posterior(**1P**) sowie das ODDS-Ratio (**1P**). Hat sich dieser "zweite" Versuch gelohnt oder nicht?

Hinweis:Der Posterior muss in beiden Fällen nur für eine Option explizit berechnet werden und kann für die zweite Option über die Gegenwahrscheinlichkeit bestimmt werden.

a) **Verständnisfragen (3 Punkte)** *Es bietet sich an, zuerst die Rechnungen zu lösen, da man sich in diesem Fall auf die Ergebnisse beziehen kann. Wer u keinen Lösungen kommt (oder will), kann die Fragen auch allgemein beantworten.*

Welche Wahrscheinlichkeiten beschreiben Posterior und Prior hier? Macht es Sinn, dass sich diese Wahrscheinlichkeiten unterscheiden? Ist das immer der Fall? (**1P**)

Was können wir nun über die betrachteten Hypothesen aussagen? Sind hier die Aussagen "richtig/falsch" zutreffend? Können wir eine absolute Aussage über die "Richtigkeit/ Falschheit"dieser Hypothesen (oder allgemein) machen? *Stichwort: Verifikation bzw. Falsifikation* (**2P**)