

ÜBUNGSKLAUSUR

01.10.2021

Rechnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Beispiel 1 Wahrscheinlichkeitsdichte (5 Punkte)

a) **Rechenteil (3 Punkte):**

Gegeben sei die Funktion

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(-ax) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

wobei zusätzlich $a > 0$ gelten soll.

Berechnen Sie nun die Normierung (**1P**) den Erwartungswert (**1P**) und die Varianz (**1P**).

b) **Verständnisteil (2 Punkte):**

Warum können wir die hier gegebene Funktion als Wahrscheinlichkeitsdichte verwenden?(Eigenschaften + kurze Begründung) (**1,5P**)

Wie kann man aus dieser Wahrscheinlichkeitsdichte die Wahrscheinlichkeit für $2 \leq x \leq 5$ bestimmen (**0,5P**)? Kein explizites Ausrechnen nötig.

Beispiel 2 Parameterschätzen (8 Punkte)

a) **Rechenteil (4 Punkte):**

Ein Experiment wird durchgeführt und liefert die Messwerte $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Gehen Sie im folgenden davon aus, dass die Messwerte x_i unabhängig voneinander sind. Wir wissen dass die Messwerte der Verteilung

$$p(x|\alpha, \mathcal{B}) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

gehoren. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\alpha}$ der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\vec{x}|\alpha, \mathcal{B})$ (**2P**). Zusätzlich zum Maximum-Likelihood-Schätzwert wollen wir uns auch noch den Maximum-a-posteriori-Schätzwert berechnen (**2P**). Hierzu gehen wir davon aus, dass der Prior folgende Form besitzt

$$p(\alpha|\mathcal{B}) = \frac{1}{\alpha}.$$

Hinweis: Es gilt $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.

b) **Verständnisfragen (4 Punkte):**

Wie unterscheiden sich der Maximum-a-posteriori-Schätzwert und Maximum-Likelihood-Schätzwert im Aufgabenteil (a)? Wie hängt das mit dem Prior zusammen?(1P).

Angenommen wir wiederholen die Rechnung mit folgendem Prior

$$p(\alpha|\mathcal{B}) = \frac{1}{\alpha^6}.$$

Wie würde sich dieser neue Maximum-a-posteriori-Schätzwert im Vergleich zu dem vorherigen ändern? (1P) Geben Sie eine kurze Erklärung.

Macht es Sinn, sich zu überlegen, ob ein Schätzwert verzerrt ist? Wieso? Wieso nicht? (1P)

Gäbe es eine Möglichkeit oder ein Verfahren, wie wir ein eventuell existierendes Vorwissen sinnvoll in unserem Prior berücksichtigen könnten? (1P)

Beispiel 3 Hypothesentests (7 Punkte)

a) **Rechenteil (4 Punkte)**

Zur Auswahl stehen zwei Würfel. Ein Würfel ist konventionell fair der andere manipuliert. Der manipulierte Würfel liefere mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% die Augenzahl 6. Zunächst wird Ihnen einer der Würfel gereicht. Sie würfeln 50-mal und erhalten 9-mal die Augenzahl 6. Als nächstes wird Ihnen der verbleibende Würfel gereicht. Sie würfeln erneut 50-mal erhalten die Augenzahl 6 diesmal allerdings 20 Mal.

Berechnen Sie den Posterior (1P) sowie das ODDS-Ratio (1P). Ignorieren Sie zunächst die Ergebnisse des zweiten Würfels. Berechnen Sie nun den Posterior(1P) sowie das ODDS-Ratio (1P) unter Berücksichtigung der Ergebnisse des zweiten Würfels. Hat sich dieser "zweite" Versuch gelohnt oder nicht?

Hinweis: Der Posterior muss nur einmal explizit berechnet werden, da wir nur zwei Möglichkeiten haben.

b) **Verständnisfragen (3 Punkte)** *Es bietet sich an, zuerst die Rechnungen zu lösen, da man sich in diesem Fall auf die Ergebnisse beziehen kann. Wer möchte, kann die Fragen auch allgemein beantworten.*

Welche Wahrscheinlichkeiten beschreiben Posterior und Prior hier? Was würde es für unseren Versuch bedeuten, falls sich diese Wahrscheinlichkeiten unterscheiden? Was wenn sie gleich sind? (1P)

Können wir nun sagen, ob der erste Würfel der faire oder manipulierte war, oder können wir immer noch nur vermuten? Könnten wir hier eine absolute Aussage treffen? *Stichwort: Verifikation bzw. Falsifikation* Falls ja, wie? Falls nein, wieso nicht (2P)