ÜBUNGSKLAUSUR

19.06.2020

Rechnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Blatt.Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und Ihre Matrikelnummer

121) Wahrscheinlichkeitsverteilungen

a) Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = \delta(x-a) = \begin{cases} \infty & \text{für } a = x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechnen Sie die charakteristische Funktion dieser Wahrscheinlichkeitsdichte.

Hinweis: Die Delta-Distribution $\delta(x-a)$ hat folgenden Einfluss auf ein Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) \mathrm{dx} = f(a)$$

b) Damit eine Funktion überhaupt als Wahrscheinlichkeitsdichte herangezogen werden kann, muss diese zwei Bedingungen erfüllen. Diese beiden Bedingungen sind die Normiertheit und die Nichtnegativität ($p(x) \geq 0$ für jedes x im betrachteten Intervall) der jeweiligen Funktion. Diese beiden Eigenschaften hätten wir zu Beginn der Rechnung überprüfen sollen, um festzustellen, ob weitere Berechnungen überhaupt sinnvoll sind. Erfüllt die gegebene Wahrscheinlichkeitsdichte die Bedingung der Nichtnegativität? Ist diese Wahrscheinlichkeitsdichte normiert? Ob Sie zur Überprüfung der Normiertheit die Wahrscheinlichkeitsdichte oder die charakteristische Funktion verwenden, liegt bei Ihnen.

c) Berechnen Sie als Nächstes den Mittelwert und die Varianz dieser Wahrscheinlichkeitsdichte. Es obliegt Ihnen, ob Sie für diese Berechnungen die charakteristische Funktion oder die Wahrscheinlichkeitsdichte nutzen wollen.

Wie sind das Ergebnis für den Erwartungswert und die Varianz zu verstehen? Hätte man diese Ergebnisse auch an der Wahrscheinlichkeitsdichte ablesen können? Wenn ja, wie?

d) Gegeben sei folgende Kovarianzmatrix C

$$C = \begin{pmatrix} \text{Var(X)} & \text{Cov(X,Y)} & \text{Cov(X,Z)} \\ \text{Cov(Y,X)} & \text{Var(Y)} & \text{Cov(Y,Z)} \\ \text{Cov(Z,X)} & \text{Cov(Z,Y)} & \text{Var(Z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.14 & 2.50 & 0.05 \\ 2.50 & 1.20 & 0.00 \\ 0.05 & 0.00 & 4.20 \end{pmatrix} ,$$

wobei Var() die Varianz und Cov(,) die Kovarianz bezeichnen.

Welche Informationen können Sie dieser Kovarianzmatrix entnehmen? Welche Werte sind korreliert? Welche nicht? Kann man über die Korrelation der verschiedenen Größen sonst noch etwas aussagen? Welche Werte streuen besonders stark? Welche eher weniger stark?

Bei genauerer Betrachtung der Kovarianzen in dieser Matrix scheint ein Widerspruch vorzuliegen. Welcher könnte das sein?

123) Hypothesentest

Wir haben für ein Produkt zwei Zulieferer A und B. Beide Lieferanten liefern die gleiche Menge an Produkten. Bei Firma A wissen wir, dass 7 % der gelieferten Teile defekt sind. Bei den von Firma B gelieferten Teilen ist hingegen nur 1 % der Teile defekt. Die gelieferten Teile müssen nun weiterverarbeitet werden. Allerdings führt das Verwenden der von A gelieferten Teile zu einer geminderten Qualität des Endprodukts und muss deshalb vermieden werden. Durch ein kleines Missgeschick lässt sich allerdings nicht mehr bestimmen, welche Teile von welchem Hersteller stammen. Deshalb werden aus einer Lieferung N Teile gezogen und untersucht.

a) Geben Sie eine Formel an, mit deren Hilfe wir die Wahrscheinlichkeit berechnen können, dass von N Teilen n Teile defekt sind, wobei die Lieferung M Teile umfasst. Die Teile werden nach dem Ziehen zurückgelegt.

b) Nutzen Sie im nächsten Schritt das Theorem von Bayes, um die Wahrscheinlichkeit $p(L_A|n,N,\mathcal{B})$ zu berechnen. Verwenden Sie hierfür $N = 200$ und $n = 20$. Es wurden folgende Propositionen verwendet.

L_A: Die (erste) Stichprobe stammt aus der Lieferung des Zulieferer A.
N : Wir ziehen eine Stichprobe vom Umfang N.
n : Die von uns gezogene Stichprobe beinhaltet n defekte Teile.

Da wir keinerlei Ahnung und auch keine Tendenz die Produkte betreffend haben, ist unsere Prior-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.
Wie erklären Sie sich die Eindeutigkeit/ Uneindeutigkeit des Ergebnisses ?

c) Aus dem Aufgabenteil **(b)** sollten wir schon eine gute Einschätzung darüber erhalten haben, ob unsere Stichprobe vom Zulieferer A oder B stammt. Nichtsdestotrotz werden wir diese Vermutung nun auch mithilfe eines Bayes'schen Hypothesentest überprüfen. Hierzu berechnen wir das ODDS-Ratio. Welcher Zulieferer wird vom Hypothesentest bevorzugt? Wie ist das Ergebnis des Hpothesentests zu verstehen? Haben wir nun Gewissheit über den Zulieferer dieser Teile?

d) Wir könnten nun eine weitere Stichprobe aus der Lieferung des zweiten Zulieferers ziehen und uns die Wahrscheinlichkeit$p(L_A|n_1,n_2,N,\mathcal{B})$ und das zugehörige ODDS-Ratio berechnen (Stichwort: Mehrfachtests). Dies ist uns allerdings etwas zu aufwendig. Deshalb begnügen wir uns hier mit einigen Überlegungen. Erklären Sie daher in Worten, wie Sie das ODDS-Ratio berechnen würden. Wie unterscheiden sich die Berechnung und das ODDS-Ratio für die Mehrfachtests von jenen aus Aufgabenteil **(c)**? Wie sind die einzelnen Beiträge aufzufassen?

122) Parameterschätzen

Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(t|\tau) = \frac{1}{Z}\exp(-t/\tau) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},\, t,\tau \in \mathbb{R}_+$$

a) Sei $t_1, \ldots, t_N$ eine Stichprobe von Daten, die der Verteilung $p(t|\tau)$ folgen. Berechnen Sie zunächst die Normierungskonstante Z. Bestimmen Sie dann unter der Annahme, dass die Daten unabhängig sind den Maximum-Likelihood-Schätzwert τ_{ML}, geben Sie diesen mit Hilfe des Stichprobenmittelwertes $\bar{t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$ an.

b) Ist dieser Schätzwert verzerrt? Führen Sie hierzu die Rechnung explizit durch. Worauf könnte ein verzerrter Schätzwert hinweisen? Ist es ratsam einen verzerrten Schätzwert zu verwenden oder sollte man hiervon abraten? Überlegen Sie sich hierzu welchen Wert ihr bester Schätzwert τ_{ML} für τ im Idealfall liefern sollte. Denken Sie dabei nicht zu kompliziert.

c) Sie sind mit Ihrer Abschätzung für den Maximum-Likelihood-Schätzwert nicht so ganz zufrieden, da dieser nur für den Fall eines flachen Priors eine vernünftige Lösung ist. Daher machen Sie uns folgenden Vorschlag: Sie möchten Ihren Schätzwert τ_{ML} benutzen, um einen besseren Prior zu bestimmen und den Maximum-a-posteriori-Schätzwert zu berechnen. Wir raten Ihnen von Ihrem Vorgehen ab und machen stattdessen folgenden Vorschlag: Da die Daten unabhängig sind, kann man die ersten $\frac{N}{2}$ Datenpunkte als erstes Experiment und die verbliebenen $\frac{N}{2}$ Datenpunkte als zweites Experiment interpretieren. Nun könnte man für das erste Experiment einen Maximum-Likelihood-Schätzwert bestimmen, den wir als Ausgangspunkt für unser zweites Experiment verwenden.

Lässt sich unsere Idee verwenden, um einen besseren Prior für das "zweite" Experiment zu bestimmen? Sollten Sie auf uns hören oder Ihre Idee umsetzen? Kann überhaupt eine der beiden Vorgangsweisen verwendet werden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.